ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ THƯƠNG

GIẢ THUYẾT HAYMAN VÀ VẤN ĐỀ DUY NHẤT CHO CÁC HÀM PHÂN HÌNH P-ADIC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - Năm 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ THƯƠNG

GIẢ THUYẾT HAYMAN VÀ VẤN ĐỀ DUY NHẤT CHO CÁC HÀM PHÂN HÌNH P-ADIC

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
PGS.TS. HÀ TRẦN PHƯƠNG

Thái Nguyên - Năm 2017

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan nội dung trong luận văn Thạc sĩ chuyên ngành Toán giải tích với đề tài "*Giả thuyết Hayman và vấn đề duy nhất cho hàm phân hình p-adic*" là sự nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Hà Trần Phương. Các kết quả chính trong luận văn chưa từng được công bố trong các luận văn Thạc sĩ của các tác giả khác ở Việt Nam.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2017

Tác giả luận văn

Nguyễn Thị Thương

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới PGS.TS. Hà Trần Phương, người đã định hướng chọn đề tài và tận tình hướng dẫn, cho tôi những nhận xét quý báu để tôi có thể hoàn thành luận văn.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới phòng Sau Đại học, các thầy cô giáo dạy cao học chuyên ngành Toán giải tích trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã giúp đỡ và tạo điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Nhân dịp này tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè đã luôn động viên, cổ vũ, tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình học tập.

Bản luận văn không thể tránh những thiếu sót, rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy cô và bạn bè đồng nghiệp để bản luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2017

Tác giả luận văn

Nguyễn Thị Thương

Mục lục

Một số ký hiệu viết tắt

$\mathbb{C}_p$	Không gian các số phức p-adic.
$\lvert.\rvert$	Giá trị tuyệt đối $\lvert.\rvert_p$ trên $\mathbb{C}_p$.
$\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$	Tập hợp các hàm nguyên trong $\mathbb{C}_p$.
$\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$	Tập hợp các hàm phân hình trong $\mathbb{C}_p$, tức là, trường phân số của $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p)$.
$\mathbb{C}_p(z)$	Tập các hàm hữu tỷ trên $\mathbb{C}_p$. Khi đó $\mathbb{C}_p(z) \subset \mathcal{M}(\mathbb{C}_p)$.
$\Gamma(a, r_1, r_2)$	Hình vành khăn $\{z \in \mathbb{C}_p : r_1 < \lvert z-a\rvert < r_2\}$.
$\mathbb{C}_p(a; r)$	Đĩa mở $\{z \in \mathbb{C}_p : \lvert z-a\rvert < r\}$.
$\mathbb{C}_p\langle a; r\rangle$	Đường tròn $\{z \in \mathbb{C}_p : \lvert z-a\rvert = r\}$.
$\mathbb{C}_p[a; r]$	Đĩa đóng $\{z \in \mathbb{C}_p : \lvert z-a\rvert \leq r\}$.
$\mathcal{A}(\mathbb{C}_p(a; r))$	Tập hợp các hàm giải tích trong đĩa $\mathbb{C}_p(a; r)$, tức là, $\mathbb{C}_p$- đại số của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ $\big($với $a_n \in \mathbb{C}_p\big)$ hội tụ trong $\mathbb{C}_p(a; r)$.
$\mathcal{M}(\mathbb{C}_p(a; r))$	Tập hợp các hàm phân hình trong đĩa $\mathbb{C}_p(a; r)$, tức là, trường phân số của $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p(a; r))$.
$\mathcal{A}_b(\mathbb{C}_p(a; r))$	$\mathbb{C}_p(a; r)$-đại số con của $\mathcal{A}(\mathbb{C}_p(a; r))$ chứa biên của hàm giải tích $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}_p(a; r))$, thỏa mãn $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \lvert a_n\rvert\, r^n < +\infty$.
$\mathcal{M}_b(\mathbb{C}_p(a; r))$	Trường phân số của $\mathcal{A}_b(\mathbb{C}_p(a; r))$.
$\mathcal{A}_r(\mathbb{C}_p)$	Vành của chuỗi lũy thừa $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (a_n \in \mathbb{C}_p)$ thỏa mãn điều kiện $\lim\limits_{n\to\infty} \lvert a_n\rvert r^n = 0$.

$\mathcal{A}_{(r}(\mathbb{C}_p)$	Tập các chuỗi lũy thừa của z mà bán kính hội tụ lớn hơn hoặc bằng r.
$\mathcal{M}_f(\mathbb{C}_p)$	Tập hợp các hàm phân hình nhỏ đối với f trong $\mathbb{C}_p$.
$\mathcal{M}_f(\mathbb{C}_p(0;R))$	Tập hợp các hàm phân hình nhỏ đối với f trong $\mathbb{C}_p(0;R)$.
$\widehat{\mathbb{C}}_p$	Mở rộng đại số của $\mathbb{C}_p$.
$\widehat{\mathbb{C}}_p(0;R)$	Đĩa mở $\left\{z \in \widehat{\mathbb{C}}_p : \lvert z\rvert < R\right\}$ chứa trong $\widehat{\mathbb{C}}_p$.
log	Logarit thực cơ số e.
$Z(r,f)$	Hàm đếm tại các không điểm của f trong $\mathbb{C}_p(0;R)$ (với $0 < r < R$).
$N(r,f)$	Hàm đếm tại các cực điểm (hàm đếm không kể bội) của f trong $\mathbb{C}_p(0;R)$ (với $0 < r < R$).
$m(r,f)$	Hàm bù (hàm xấp xỉ) của f.
$T(r,f)$	Hàm đặc trưng của f.

$v(z) = -\log \lvert z\rvert$.

$\mathcal{A}_r(\mathbb{C}_p) = \mathcal{A}_{(\infty}(\mathbb{C}_p)$.

$\mathcal{A}_u(\mathbb{C}_p(a;r)) = \mathcal{A}(\mathbb{C}_p(a;r))\backslash\mathcal{A}_b(\mathbb{C}_p(a;r))$.

$\mathcal{M}_u(\mathbb{C}_p(a;r)) = \mathcal{M}(\mathbb{C}_p(a;r))\backslash\mathcal{M}_b(\mathbb{C}_p(a;r))$.

Các phần tử trong $\mathcal{M}(\mathbb{C}_p)\backslash\mathbb{C}_p(z)$ được gọi là hàm siêu việt và có vô hạn không điểm hoặc cực điểm.

(Với $a \in \mathbb{C}_p$, $r > 0$ và r_1, r_2 thỏa mãn $0 < r_1 < r_2$)

Mở đầu

Năm 1967, W. K. Hayman đã đặt ra một giả thuyết khá nổi tiếng mà ta thường gọi là giả thuyết Hayman: Nếu một hàm nguyên f thỏa mãn điều kiện $f^n(z)f'(z) \neq 1$ với mọi $z \in \mathbb{C}$, trong đó n là một số nguyên dương nào đó thì f phải là hàm hằng. Và ông cũng đặt ra câu hỏi: nếu f là hàm phân hình siêu việt, thì $f' + af^m$ có vô số không điểm mà không là không điểm của f với mỗi số nguyên $m \geq 3$ và $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$? Giả thuyết này thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều tác giả và đã có nhiều công trình khoa học được công bố theo hướng nghiên cứu này trong các trường hợp khác nhau: hàm phân hình phức, hàm phân hình p-adic, đa thức sai phân,.... Các kết quả nghiên cứu giả thuyết Hayman theo hướng này tập trung lại thành một vấn đề chung được gọi là "Sự lựa chọn Hayman".

Từ năm 2008, trong công trình [19], nhà toán học J. Ojeda đã nghiên cứu giả thuyết Hayman trong trường hợp hàm phân hình siêu việt p-adic. Ý tưởng chính trong bài báo này của ông là trả lời câu hỏi của Hayman bằng cách xét hàm $f' + Tf^m$ với $T \in \mathbb{C}_p(z)$ và ông đã chứng minh câu hỏi của Hayman đúng khi $m \geq 5$ và $m = 1$. Ngoài ra, trong một số công trình gần đây J. Ojeda đã công bố một số kết quả về vấn đề duy nhất cho hàm phân hình p-adic. Ông đã chứng minh: với f, g là các hàm nguyên trên $\mathbb{C}_p$, Giả sử $a \in \mathbb{C}_p\setminus\{0\}$ và

$n, k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$, α là hàm nguyên nhỏ đối với f và g. Nếu $f^n(f-a)^k f'$ và $g^n(g-a)^k g'$ chung nhau giá trị α kể cả bội, với $n \geq \max\{6-k, k+1\}$ thì $f = g$. Nếu $\alpha \in \mathbb{C}_p{}^*$ và $n \geq \max\{5-k, k+1\}$ thì $f = g$. Và : với f, g là hai hàm giải tích không giới nội trong một đĩa mở của $\mathbb{C}_p$, α là hàm nhỏ giải tích trong cùng đĩa. Nếu $f^n(f-a)^2 f'$ và $g^n(g-a)^2 g'$ chung nhau giá trị α kể cả bội, với $n \geq 4$ thì $f = g$. Nếu $f^n(f-a)f'$ và $g^n(g-a)g'$ chung nhau giá trị α kể cả bội, với $n \geq 5$ thì $f = g$.

Mục đích của luận văn **"Giả thuyết Hayman và vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình p-adic"** trình bày lại một số kết quả nghiên cứu về giả thuyết Hayman p-adic và vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình p-adic, được J.Ojeda công bố trong các tài liệu [19] và [20]. Luận văn được bố cục thành 2 chương cùng phần mở đầu, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1. Giả thuyết Hayman p-adic. Trình bày những kiến thức cơ bản về phân bố giá trị cho hàm phân hình p-adic, giả thuyết Hayman cho các hàm phân hình p-adic - một trong những kết quả nghiên cứu của J.Ojeda từ năm 2008.

Chương 2. Vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình p-adic. Trong chương này chúng tôi trình bày lại một số nghiên cứu của J.Ojeda và một số tác giả khác trong thời gian gần đây về vấn đề đa thức xác định duy nhất cho các hàm phân hình và các hàm phân hình chung nhau một hàm nhỏ.

Chương 1

Giả thuyết Hayman p-adic

1.1. Phân bố giá trị cho hàm phân hình p-adic

Các hàm đặc trưng Nevanlinna

Trong phần này ta luôn quy ước các số thực ρ_0, r, ρ thỏa mãn $0 < \rho_0 < r < \rho \leq \infty$.

Định nghĩa 1.1. Giả sử $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{A}_\rho(\mathbb{C}_p)$, ta định nghĩa *số hạng lớn nhất* bởi $\mu(r, f) = \max\limits_{n \geq 0} |a_n| r^n$
và *chỉ số trung tâm* là

$$\nu(r, f) = \max_{n \geq 0} \{n : |a_n|\, r^n = \mu(r, f)\}.$$

Với $r = 0$, ta định nghĩa $\mu(0, f) = \lim\limits_{r \to 0^+} \mu(r, f); \quad \nu(0, f) = \lim\limits_{r \to 0^+} \nu(r, f)$.

Mệnh đề 1.2. *Chỉ số trung tâm $\nu(r, f)$ tăng theo r khi $r \to \rho$ và thỏa mãn*

$$\log \mu(r, f) = \log |a_{\nu(0,f)}| + \int\limits_0^r \frac{\nu(t, f) - \nu(0, f)}{t} dt + \nu(0, f) \log r.$$